亜群C^*環と指数定理 (C^*-環と関連する力学系)

森吉, 仁志

数理解析研究所講究録 1379 巻 2004 年 48-71

亜群 C*環と指数定理

森吉仁志（慶応義塾大学・理工）
Hitoshi MORIYOSHI (Keio University)

序

1963年に Atiyah-Singer [AS63] は，Gauss-Bonnet 定理 (Chern [C44])・Riemann-Roch-Hirzebruch 定理 [H66]・Thom-Hirzebruch 符号数定理[T54, H66] などを謂わば統合する形で，閉多様体上の一般の楕円型微分作用素に対する指数定理を証明した．この Atiyah-Singer 指数定理は，多様体における幾何不変量と解析不変量を結びつける非常に有用性の高い定理であり，その内容は深く美しい．指数定理はその後 1968年に Atiyah-Segal-Singer の G 同変指数定理 [AS68, ASe68] へと拡張され，さらに 1969年には Atiyah-Singer により自己共役フレドホルム作用素の指数定理 [AS69]（いわゆる奇数次元の指数定理）へ，1971年には作用素族の指数定理・Mod 2 指数定理[AS68] へと一般化された．

一方 1973年には Atiyah-Bott-Patodi あるいは Gilkey 等により熱核 (heat kernel) を用いた指数定理の別証明 [ABS73, G73] が与えられる．技術的には，この熱核による手法が境界付き多様体や非コンパクト多様体上での指数定理への道を開き，その後の指数定理の発展を導いてゆく．実際 1975年には，Atiyah-Patodi-Singer [APS75] が熱核を用いて，エータ不変量・スペクトル流という解析不変量の新しい概念を導入し，境界付き多様体上の指数定理・Mod k 指数定理を証明した．また有限被覆空間上の同変指数定理は G 同変指数定理の特別な場合であるが，これに対して Atiyah と I. M. Singer は von Neumann 環における「次元」を用いた指数の一般化を行い，無限被覆空間上で指数定理 (Γ-index theorem)[A76, S77] を定式化した．そして 1985年にはエータ不変量の断熱極限と Determinant line bundle に関する Witten による結果 ([W85]) に始まって，Bismut, Cheeger 等により，Chern-Simons 類・エータ不変量・R-torsion ・Analytic torsion といった二次不変量の間に指数定理を媒介とした密接な関連性のあることが見出された．90年代に入ってこれらの結果は，物理学や数学の他分野との結び付きをも見出してゆく．

一方 1980年頃 A. Connes は，作用素環論におけるフォン・ノイマン環因子 (factor) の具体例の考察から亜群 (groupoid) の C^* 群環に対する興味を深め，このような C^* 環を用いた指数定理の一般化を創めた．そして C^* 環の K 理論を用いて，1982年に葉層多様体上の指数定理 [Co82]・非コンパクト等質空間上の G 指数定理 (A. Connes and H. Moscovici [CM82]) を証明した．コンパクト葉層多様体上の Connes 指数定理とは，Atiyah-Singer の族指数定理と Γ-index theorem を併せた指数定理の一般化と考えられる．さらに A. Connes は 1986年に「非可換微分幾何学」という新しい幾何学の枠組を提起し ([Co86-1])，その中心に指数定理を据えて，1990年代以降微分幾何学・位相幾何学・作用素環論・エルゴード理論・

大域解析学にまたがる壮大な分野の構想を展開しつつある (A. Conees, Noncommutative Geometry [Co94]). ここに誤解を恐れず彼の思想を要約すると,「興味深い作用素環は必ずDirac 作用素に類した基本類というべき作用素をもつ. この作用素のホモトピー論的性質を探ることが指数定理の内容であり, そこには必ず幾何描像 (Noncommutative Geometry) が存在する.」と言えるのではないだろうか. このように, 今や指数定理は幾何学における中心課題のひとつとして, その地位を確立しつつある.

今回の短期共同研究集会では, 指数定理が幾何学において果している役割について, 変換群・亜群に関連する幾何描像を用いながら解説する. そして, この幾何描像から現れてくる作用素環と指数定理に焦点を絞りながら論じてゆく.

1. K 理論

1.1. 位相的 K 理論. まず位相的 K 理論, いわゆる空間の K コホモロジー群の定義と性質を簡単に復習する. コンパクトハウスドルフ空間 X 上の複素ベクトル束の同型類の集合がベクトル束の Whitney 和により成す半群を考える. この半群の普遍アーベル群, 即ち Grothendieck 群を $K^0(X)$ と表す. このとき $K^0(X)$ の任意の元は, X 上の 2 つのベクトル束 E, F の形式的な差 $E-F$ として表現される. またコンパクト空間対 (X,A) に対して相対 K 群 $K^0(X,A)$ も以下で定義される. まず X 上のベクトル束 E, F と A 上でのベクトル束の同型写像 $\alpha : E|_A \to F|_A$ の組 (E,F,α) の同型類が成す集合 $M(X,A)$ は直和により半群となる. また同型写像として X 上へ拡張可能である α からなる組 (E,F,α) の同型類が成す部分集合を $E(X,A)$ とする. このとき $K^0(X,A)=M(X,A)/E(X,A)$ はアーベル群となる. これをコンパクト空間対 (X,A) の相対 K 群という.

また局所コンパクトハウスドルフ空間 X の一点コンパクト化 X^+ を考えて, $K^0(X)=\{E-F\in K^0(X^+)|\ \mathrm{rk}\,E=\mathrm{rk}\,F\}$ と定める. また高次の K 群を $K^{-i}(X)=K^0(X\times\mathbb{R}^i)$ $(i\geq 0)$ と定義する. このとき K^{-i} 群の間には Bott 周期性[AB64] という周期 2 の同型 $K^{-i+2}(X)\cong K^{-i}(X)$. が成り立つことが知られている. これより $i>0$ に対しても $K^i(X)=K^{i-2j}(X)$ $(j>0)$ として K 群を定めることができる.

また連続写像 $f:X\to Y$ が与えられたとき, X 上のベクトル束 E に対し引き戻し f^*E を対応させて, 準同型 $f^*:K^i(Y)\to K^i(X)$ が定まる. こうして定義された関手 $K^i(X)$ は一般コホモロジー理論を定めており, ホモトピー不変性・空間対に対する長完全系列の存在・切除定理等の性質を有することが知られている.

ここで $K^1(X)$ に関して別の定義も記述しておく. $M_n(\mathbb{C})$ を n 次複素行列環とし, ユニタリ群を $U_n=\{u\in M_n(\mathbb{C})\mid uu^*=1\}$ と表す. ここで埋め込み

$$u\longmapsto\begin{pmatrix}u&0\\0&1\end{pmatrix}$$

による直極限 $U_\infty=\varinjlim U_n$ を考える. コンパクトハウスドルフ空間 X に対し連続写像 $\varphi,\psi:X\to U_m$ が与えられたとき, これらを U への連続写像と考えて, その和を $\varphi(x)\oplus\psi(x)$ で与える. このときホモトピー類の集合 $[X,U_\infty]$ はアーベル群となり, これは $K^1(X)$ と同型になる.

1.2. C^* **環の** K **理論.** K コホモロジーは位相空間の連続関数環を用いても記述される．コンパクトハウスドルフ空間 X が与えられたとき，X の連続関数環 $C(X)$ は最大値ノルム $\|f\| = \max_{x\in X}|f(x)|$ により可換 C^* 環である．また局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対して

$$C_o(X) = \{f \in C(X^+)|\ f(\infty) = 0\}$$

と定める．$X^+ = X \cup \{\infty\}$ は X の一点コンパクト化である．この環はコンパクト台を持つ連続関数環を上のノルムで完備化したものと考えてもよい．ここで Gel'fand-Naĭmark の定理によれば，任意の可換 C^* 環は適当な局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対する $C_o(X)$ と同型になる．従って可換 C^* 環の圏は，局所コンパクトハウスドルフ空間の圏と全く同値である．

ここで一般の C^* 環に対して K 群を定義しよう．まず C^* 環 $\mathcal{A}$ が単位元 1 をもつ時を考える．いま $\mathcal{A}$ を成分とする次数 n の行列環を $M_n(\mathcal{A})$ で表す．このとき埋め込み

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

により定まる直極限を $M(\mathcal{A}) = \varinjlim M_n(\mathcal{A})$ とおく．そして $M(\mathcal{A})$ に属する巾等元全体の集合 $\{e \in M(\mathcal{A}) \mid e = e^2\}$ を $P(\mathcal{A})$ で表す．ここで連結成分の集合 $\pi_0 P(\mathcal{A})$ は行列の直和 $e_0 \oplus e_1$ を和として半群を成す．

定義 1.2.1. 半群 $\pi_0 P(\mathcal{A})$ の普遍アーベル群，すなわち *Grothendieck* 群を $K_0(\mathcal{A})$ と表し，$\mathcal{A}$ の K_0 群という．

また単位元をもつ C^* 環 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ と準同型写像 $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が与えられたとする．ここで 2 つの巾等元 $e_0, e_1 \in P(\mathcal{A})$ と，その像 $\rho(e_0)$ と $\rho(e_1)$ を結ぶ巾等元からなる連続な族 $(p_t)_{t\in[0,1]} \subset P(\mathcal{B})$ を考える．そして (e_0, e_1, p_t) がホモトピーで移りあうとき，これらは同値であると定義する．この同値類の全体を $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ で表す．直和により $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は半群となる．さらに $P(\mathcal{A})$ への p_t の連続な持ち上げ $\tilde{p}_t$ が存在するような (e_0, e_1, p_t) の同値類が成す部分集合を $E(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ とする．このとき $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})/E(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ はアーベル群となる．

定義 1.2.2. $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})/E(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ を $K_0(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と表し，C^* 環の対 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の相対 K_0 群という．

註 1.2.3. 組 (e_0, e_1, p_t) において，$\rho(e_0) = \rho(e_1)$ かつ巾等元の族 p_t が一定であるとき，これが定める元を単に $e_0 - e_1$ とも表す．

次にユニタリ元 $u \in M_n(\mathcal{A})$, $uu^* = 1$ の全体を $U_n(\mathcal{A})$ で表す．ここで埋め込み

$$u \longmapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考え，$U(\mathcal{A}) = \varinjlim U_n(\mathcal{A})$ とおく．このとき連結成分の集合 $\pi_0 U(\mathcal{A})$ は行列の直和 $u_0 \oplus u_1$ を和としてアーベル群を成す．

定義 1.2.4. アーベル群 $\pi_0 U(\mathcal{A})$ を $K_1(\mathcal{A})$ と表し，$\mathcal{A}$ の K_1 群という．

このとき K_0 群の場合と同様に相対 K 群 $K_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ も定義される．

また単位元をもつ C^* 環 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ と準同型写像 $\rho:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が与えられたとき，自然な写像 $\rho_*:K_i(\mathcal{A})\to K_i(\mathcal{B})$ $(i=0,1)$ が定まる．従って C^* 環の K_* 群は射に関して共変的である．

次に C^* 環 $\mathcal{A}$ が単位元をもたないとする．いま $\mathcal{A}^+=\mathcal{A}\oplus\mathbb{C}$ の元 (a,x) を $a+x\cdot 1$ と表し，$(a+x\cdot 1)(b+y\cdot 1)=(a+b+xb+ya)+xy\cdot 1$ により $\mathcal{A}^+$ 上に積を定める．このとき $\mathcal{A}^+$ は単位元 1 をもつ C^* 環であり，自然な写像 $\pi:\mathcal{A}^+\to\mathbb{C}$, $\pi(a+x\cdot 1)=x$ が存在する．

定義 1.2.5. C^* 環 $\mathcal{A}$ が単位元をもたないとき，$K_i(\mathcal{A})=\ker[\pi_*:K_i(\mathcal{A}^+)\to K_i(\mathbb{C})]$ を $\mathcal{A}$ の K 群という．相対 K 群も同様に定義できる．

ここで K 群が有する重要な性質をまとめておこう．

1) 安定性: 自然に $K_*(\mathcal{A})$ は $K_*(\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C}))$ と同型[1]である．

2) ホモトピー不変性: C^* 環 $\mathcal{A}$ を値とする閉区間上の連続関数環を $C([0,1],\mathcal{A})$ と表し，0,1 での値をとる準同型写像をそれぞれ ι_0, $\iota_1:C([0,1],\mathcal{A})\to\mathcal{A}$ とおく．与えられた準同型写像 ρ_0, $\rho_1:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に対し，準同型写像 $\rho:\mathcal{A}\otimes C[0,1]\to\mathcal{B}$ が存在して $\rho\circ\iota_i=\rho_i$ $(i=0,1)$ であるとき，ρ_0 と ρ_1 はホモトープという．このとき K 群上に誘導される準同型写像 $(\rho_0)_*$, $(\rho_i)_*$ は互いに一致する．

2) 6 項完全系列: 短完全系列 $0\to\mathcal{I}\xrightarrow{\iota}\mathcal{A}\xrightarrow{\pi}\mathcal{B}\to 0$ があるとき，次の完全系列が存在する．

$$
\begin{array}{ccccc}
K_0(\mathcal{I}) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{B}) \\
{\scriptstyle\partial}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\
K_1(\mathcal{B}) & \xleftarrow[\pi_*]{} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow[\iota_*]{} & K_1(\mathcal{I})
\end{array}
$$

3) 切除同型: 短完全系列 $0\to\mathcal{I}\xrightarrow{\iota}\mathcal{A}\xrightarrow{\pi}\mathcal{B}\to 0$ に対して次の同型が成り立つ．

$$K_i(\mathcal{I})\cong K_i(\mathcal{A},\mathcal{B})\qquad(i=0,1)$$

4) Bott 周期性: 同型 $K_i(\mathcal{A})\cong K_i(\mathcal{A}\otimes C_o(\mathbb{R}^2))$ $(i=0,1)$ が成立する．

例 1.2.6. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素全体のなす C^* 環を $\mathcal{L}$ で表し，コンパクト作用素全体のなすイデアルを $\mathfrak{K}$ とする．このとき $K_0(\mathfrak{K})=\mathbb{Z}$, $K_1(\mathfrak{K})=0$ となる．実際 $\mathfrak{K}$ の射影元[2]はすべて $\mathcal{H}$ の有限次元部分空間上への射影作用素であることが知られており，$K_0(\mathfrak{K})$ の任意の元はこれらの射影作用素の差で代表される．さらに作用素のトレイス Tr を用いて $e_0-e_1\mapsto \mathrm{Tr}\,(e_0-e_1)$ として定まる写像

$$\mathrm{Tr}:K_0(\mathfrak{K})\to\mathbb{Z}$$

は同型写像を与える．また $\mathcal{L}$ に対しては *Kuiper* の定理により $K_0(\mathcal{L})=0$, $K_1(\mathcal{L})=0$ が成り立つ．ここで $\mathcal{Q}=\mathcal{L}/\mathfrak{K}$ とおく．これを *Calkin* 代数という．このとき完全列

$$0\to\mathfrak{K}\to\mathcal{L}\to\mathcal{Q}\to 0$$

[1]このことは，環が森田同値ならば K 群は同型であることを示している．

[2]巾等元であって自己共役である元，即ち $e^2=e, e^*=e$ なる元を射影元という．

が引き起こす6項完全系列を考える．上の事実から連結準同型$\partial: K_i(\mathfrak{K}) \to K_{i+1}(\mathfrak{K})$が同型を与えるので，$K_0(\mathcal{Q}) = 0$,　$K_1(\mathcal{Q}) = \mathbb{Z}$が判る．ここで$K_1(\mathcal{Q})$に属する任意の元は$\mathcal{Q}$の可逆元によって代表されている．そして$\mathcal{Q}$の可逆元とは，$\mathfrak{K}$を法として可逆な$\mathcal{H}$上の作用素，即ちフレドホルム作用素[3]に外ならない．フレドホルム作用素Fの指数を

$$\operatorname{Ind} F = \dim\ker F - \dim\ker F^*$$

と定めると，この対応により同型写像$\operatorname{Ind}: K_1(\mathcal{Q}) \to \mathbb{Z}$が与えられる．

局所コンパクトハウスドルフ空間Xから定まる$C_o(X)$はC^*環である．このとき次の定理が成り立つので，C^*環のK理論は位相的K理論を包含していると考えられる．

定理 1.2.7 (Swan). $K^i(X)$は自然に$K_i(C_o(X))$と同型である．

1.3. 同変K理論と接合積. 空間が群作用をもつとき，この作用に関する同変K理論を考えることができる．いま有限群あるいはコンパクトなリー群Gがコンパクトハウスドルフ空間Xに作用していると仮定する．ここで単なるベクトル束の代りに，X上の作用と両立するG作用をもつベクトル束（これをGベクトル束という）を考える．このときG作用を込めて Grothendieck 群の構成を行い，Gベクトル束のK群を定義することができる．これをG同変K群とよび，$K_G^*(X)$で表す．

一方群作用がX上にあるとき，接合積とよばれるC^*環$C_o(X) \rtimes G$が定義される．接合積は局所コンパクト群の作用に関して一般に定まるが，ここでは有限群として接合積を説明する．いま有限群Gが局所コンパクトハウスドルフ空間Xに（右から）作用しているとする．このとき$g \in G$に対応する形式的ユニタリ元U_gを導入し，連続関数環$C_o(X)$の元を係数とする形式的な有限和$\sum_{g\in G} a_g U_g$，$a_g \in C_o(X)$の全体を$C_o(X) \rtimes G$と表し，$a = \sum_{g\in G} a_g U_g$, $b = \sum_{h\in G} b_h U_h$に対する和と積を

$$a + b = \sum_g (a_g + b_g) U_g, \qquad ab = \sum_{g,h} a_g g(b_h) U_{gh}$$

と定める．ただし$g(b_h)(x) = b_h(xg)$　$(x \in X)$である．Gが作用する環$C_o(X)$を係数とする群環と考えるとこれは了解しやすい．こうして得られるC^*環をG作用と$C_o(X)$の接合積といい，$C_o(X) \rtimes G$で表す．このとき次の定理が成り立つ．

定理 1.3.1 (Green). 有限群あるいはコンパクトリー群Gの作用に関して

$$K_*(C_o(X) \rtimes G) \cong K_G^*(X)$$

という自然な同型写像が存在する．

---

[3]フレドホルム作用素全体を$Fred$，$\mathcal{Q}$の可逆元全体を$GL(\mathcal{Q})$で表す．このとき射影$\pi: \mathcal{L} \to \mathcal{Q}$に関し$\pi^{-1}(GL(\mathcal{Q})) = Fred$であり，さらに$Fred$と$GL(\mathcal{Q})$はホモトピー同値となる．

位相空間 G から X への写像 s (*source*) と r (*range*) が存在し：

- 元 $\alpha, \beta \in G$ に対して $s(\alpha) = r(\beta)$ のとき積 $\alpha\beta$ が定まり；
- 任意の $\alpha \in G$ に対して逆元 α^{-1} 存在する；

とき G を亜群 (pseudo-group, groupoid) という.

$$\underset{r(\alpha)}{\bullet} \xleftarrow{\alpha} \underset{s(\alpha)=r(\beta)}{\bullet} \xleftarrow{\beta} \underset{s(\beta)}{\bullet} \qquad \underset{r(\alpha)}{\bullet} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \underset{s(\alpha)}{\bullet}$$

亜群に Haar 測度の族 $d\mu$ が付与されているとき，コンパクト台をもつ連続関数の全体 $C_c(G)$ に次の合成積 (convolution) が定まる.

$$(a * b)(\gamma) = \int_{\alpha\beta=\gamma} a(\alpha)b(\beta)d\mu = \int a(\gamma\beta^{-1})b(\beta)d\mu(\beta), \qquad a, b \in C_c(G)$$

これを C^* 完備化して C^* 群環 C^*G が定義される（ Connes [Co82] を参照）.

例 2.0.2 (変換亜群). 群 G が空間 X に作用しているとする．いま $X \times G$ から X への写像 s, r を $s(x,g) = xg$, $\quad r(x,g) = x$ とし，(x,g), $(y,h) \in X \times G$ に対して

$$(x,g)(y,h) = (x,gh) \quad \text{ただし}\, xg = y, \qquad (x,g)^{-1} = (xg, g^{-1})$$

と定める．このとき亜群の C^* 群環は接合積 $C_o(X) \rtimes G$ に同型となり，合成積は接合積の掛け算に他ならない.

例 2.0.3 (開被覆). 局所コンパクトハウスドルフ空間 X の開被覆 $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ をとる．ここで $U_{ij} = U_i \cap U_j$ として非連結和

$$\Gamma_{\mathcal{U}} = \bigsqcup_{(i,j)\in I\times I} U_{ij}$$

を考える．ここでは添字の順序を考慮して U_{ij} と U_{ji} は区別する．いま X への写像 s, r を $s(x_{ij}) = r(x_{ij}) = x$ とおく．ただし $x_{ij} \in U_{ij}$ を X の点と見るとき単に x と表すことにする．すると亜群の積は

$$x_{ij}x_{jk} = x_{ik}, \qquad x_{ij}^{-1} = x_{ji}$$

で与えられる．つまり添字は，掛け算をするときの行列の足と同じ振舞をする．このとき $C^*\Gamma_{\mathcal{U}}$ は $C_o(X)$ に森田同値となり，その K 群は位相的 K 群 $K^*(X)$ と同型になる.

ここで開被覆に付随し $U(1)$ に値をもつ Čech 2-cocycle $\sigma = (\sigma_{ijk})$ を用いて $C^*\Gamma_{\mathcal{U}}$ の合成積をさらに捻る[4]：

$$x_{ij}x_{jk} = x_{ik}\sigma_{ijk}(x)$$

こうして定まる C^* 環を $C^*(\Gamma_{\mathcal{U}}, \sigma)$ で表す．この C^* 環が与える K 群は X の twisted K-group とよばれ，素粒子論に現れる D-brane との関連が最近指摘されている (Atiyah [A00]).

[4]これを連結準同型で送って得られる $H^3(X;\mathbb{Z})$ のコホモロジー元を Dixmier-Douady 類という.

例 2.0.4 (Twisted group C^*-algebra). 離散群 Γ と，$U(1)$ に値をもつ Γ の *2*-コサイクル σ を考える．いま $g \in \Gamma$ に対する形式的ユニタリ元を U_g として，次のように捻った積を群環上に定義する：

$$U_g U_h = \sigma(g,h) U_{gh}$$

この積をもつ C^* 環を $C^*(\Gamma,\sigma)$ で表し，*2*-コサイクル σ で捻った Γ の C^* 群環という．

例えば，アーベル群 $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ 上で次の *2-cocycle* $\sigma : \Gamma \times \Gamma \to U(1)$:

$$\sigma(g,h) = e^{2\pi i\theta\langle g,h\rangle}, \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

を考える．ただし $\langle g,h\rangle = 1/2\det(g\,h)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の標準的 *symplectic form* である．このとき定まる $C^*(\Gamma,\sigma)$ は，非可換関係式 $UV = e^{2\pi i\theta}VU$ をみたすユニタリ元 U, V が生成する普遍 C^* 環に同型となることが知られている．これを非可換トーラスとよび，$\mathcal{A}_\theta$ とあらわす．

例 2.0.5 (積分核). 局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対し，$G = X \times X$ から X への写像 s, r を $s(x,y) = y$, $r(x,y) = x$ とおき，

$$(x,y)(y,z) = (x,z), \qquad (x,y)^{-1} = (y,x)$$

とおく．このときコンパクト台をもつ $X \times X$ 上の連続関数 k, ℓ に対して合成積は

$$(k * \ell)(x,z) = \int_X dy k(x,y)\ell(y,z)$$

で定まる．これは各々 k, ℓ を積分核とするヒルベルト空間 $L^2(X)$ 上の作用素の合成に他ならない．このとき C^*G はコンパクト作用素全体のなす C^* 環 $\mathfrak{K}$ と同型になる．

例 2.0.6 (Γ 同変な積分核). 離散群 Γ が被覆変換群として空間 X に作用しているとする．このとき $X \times X$ の二点 $\alpha = (x,y)$, $\alpha' = (x',y')$ に対し，ある $\gamma \in \Gamma$ が存在して $(x\gamma, y\gamma) = (x',y')$ が成り立つときに α は α' に同値とする．ここで商集合 $G = (X \times X)/\sim$ から X/Γ への写像 s, r を

$$s(\alpha) = [y], \quad r(\alpha) = [x]$$

と定める．このとき C^*G は，Γ コンパクトかつ連続な積分核をもち Γ 作用と可換な $L^2(X)$ 上の作用素が生成する C^* 環 $\mathfrak{K}_\Gamma$ と同型になる．

例 2.0.7 (葉層 C^* 環). 葉層多様体 $(M,\mathcal{F})$ を考える．M 上の同じ葉に沿う二つの曲線に関して，端点が等しくかつ同じホロノミーを導くならば同値であると定義する．いま同値類の集合を G とすると，G はハウスドルフ性を除く多様体の性質を有する．ここで写像 s, $r : G \to M$ を

$$s(\gamma) = \gamma \text{ の始点}, \qquad r(\gamma) = \gamma \text{ の終点},$$

と定め，積は曲線の合成，逆元は逆向きの曲線とすると G は亜群 *(groupoid)* となる．これを $(M,\mathcal{F})$ のホロノミー亜群といい，その亜群 C^* 環 $C^*(M,\mathcal{F})$ を葉層 C^* 環という．特に X 上のファイバー束 M に各ファイバーを葉とする葉層構造を与えると，葉層 C^* 環は X の連続関数環とコンパクト作用素全体のテンソル積 $C(X) \otimes \mathfrak{K}$ に同型となる．

3. グラフ射影元と作用素の指数

3.1. グラフ射影元. フレドホルム作用素 $F:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 対してその指数を

$$\operatorname{Ind} F = \dim\ker F - \dim\ker F^*$$

と定めた．K 群の元として捉えるために，この指数を射影元の形式的差の形で書き直したい．一般にヒルベルト空間 V 上の線形作用素 $T:V\to V$ をとり，そのグラフ

$$G_T = \{(v,Tv)\in V\oplus V : v\in V\}\subset V\oplus V$$

を考える．このとき $V\oplus V$ から G_T への直交射影としてグラフ射影元 e_T を定義する．この作用素は具体的に次の表示をもつ．

$$e_T = \begin{pmatrix} (1+T^*T)^{-1} & (1+T^*T)^{-1}T^* \\ T(1+T^*T)^{-1} & T(1+T^*T)^{-1}T^* \end{pmatrix} : \begin{matrix} V \\ \oplus \\ V \end{matrix} \to \begin{matrix} V \\ \oplus \\ V \end{matrix}.$$

例 3.1.1. 例えば $z\in\mathbb{C}$ として，$V=\mathbb{C}$ への掛け算作用素 $T=z$ をを考える．このとき

$$e_z = \frac{1}{1+z\overline{z}}\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} \\ z & z\overline{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

となる．さらにパラメーター $z\in\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ をもつ射影元の族として e_z を考えると，これは $K^0(\mathbb{R}^2)=\mathbb{Z}$ の生成元である *Bott projection* に一致する．

3.2. 作用素の指数. 偶数次元多様体 M 上に Dirac 作用素 D を選び，スピン束 $S=S^+\oplus S^-$ の切断に作用させる．いま H^+ と H^- を各々 S^+ と S^- の L^2 切断のなすヒルベルト空間とする．このとき一階微分作用素 $D^+:H^+\to H^-$ は閉作用素で，そのグラフ

$$G_{D^+} = \{(\xi, D^+\xi)\in H^+\oplus H^- : \xi\in Dom(D^+)\}$$

は $H^+\oplus H^-$ の閉部分空間を定める．従ってその上への直交射影 e_{D^+} は有界作用素として与えられる．さらに

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．いま M が閉多様体ならば，Rellich の補題より $e_{D^+}-e_1$ はコンパクト作用素である．従って

$$\operatorname{Ind} D = e_{D^+} - e_1 \in K^0(\mathfrak{K})$$

が定義できる．このとき $\operatorname{Ind} D$ は D^+ のフレドホルム指数と一致する．以下，$\operatorname{Ind} D$ も作用素 D の指数と呼ぶ．上で見たように $e_{D^+}-e_1$ が属する適当な C^* 環 $\mathcal{A}$ を特定すれば，$\operatorname{Ind} D\in K^0(\mathcal{A})$ が定まる．実際 X をパラメター空間とする族指数定理においては，このようにして族の指数 $\in K^0(X)$ が定義される．

3.3. K 群と作用素の指数. 閉多様体 M 上の楕円型微分作用素 T は Fredholm 作用素を与える。このとき T の指数を

$$\mathrm{Ind}\, T = \dim\ker T - \dim\ker T^*$$

と定義した。ここでコンパクト作用素全体の成す C^* 環を $\mathfrak{K}$ と表すとき、指数 $\mathrm{Ind}\, T$ をグラフ射影元により定義したが、より一般の定義の仕方を与えよう。

まず M にリーマン計量を与えて、2 乗可積な関数全体の成すヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とおく。このとき M は完備なリーマン多様体であることから、M 上で形式的に自己共役な微分作用素は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素に一意的に拡張する。この自己共役作用素を D とすると、Stone の定理によって $\{e^{itD}\}_{t\in\mathbb{R}}$ というユニタリ作用素の 1 径数群が存在する。ここで断面曲率が有界な完備リーマン多様体においては、自己共役な楕円型微分作用素 D が有限伝播速度 (finite propagation speed) を持つという事実が基本的である。これを用いて次の補題が示される：

補題 3.3.1. コンパクトで境界の無い多様体 M 上の自己共役な楕円型微分作用素 D を考える。いま $\mathbb{R}$ 上の急減少関数 f が与えられたとき、

$$f(D) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itD}dt$$

により定められる $\mathcal{H}$ 上の作用素は *smoothing operator* となり、この作用素は C^∞ 級の核関数を持つ。

この補題からさらに次の命題が成り立つ。

命題 3.3.2. 上の補題と同じ仮定の下で、D に依存する C^* 環の準同型写像

$$\rho : C_o(\mathbb{R}) \to \mathfrak{K}$$

が存在し、急減少関数 f に対しては $\rho(f) = f(D)$ が成り立つ。ここで $\mathfrak{K}$ は $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素の全体を表す。

註 3.3.3. 指数定理を拡張する際に必要となるので、基本となる補題とそれから導かれる命題を一般的な形で述べた。しかし境界の無いコンパクト多様体上では以下のようにして簡単に ρ を構成することができる。いま D は楕円型微分作用素であるからよく知られているように、$\mathcal{H}$ は D の固有空間の直和に分解し各固有空間の次元は有限となる。ここで固有値 λ の固有空間を V_λ と表す。このとき $\mathcal{H}$ 上の作用素 $\rho(f)$ は、各 V_λ 上で $\rho(f)|V_\lambda = f(\lambda)\mathrm{Id}$ となる作用素として与えられる。

さて偶数次元の多様体上で定義された Dirac 作用素を思い出そう。このとき次数作用素とよばれる自己共役作用素が存在して、$\epsilon D + D\epsilon = 0$ が成り立っていた。一方 $\mathbb{R}$ 上に反転を行う変換 $\epsilon(x) = -x$ $(x \in \mathbb{R})$ を考え、これにより位数 2 の巡回群 $\mathbb{Z}_2$ が $\mathbb{R}$ に作用しているとする。この作用に関する接合積を $C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ と表す。ここで U_e, U_ϵ を各々単位元と $\mathbb{Z}_2$ の生成元に対応する形式的ユニタリ元とすれば、接合積の任意の元 a は f_0, $f_1 \in C_o(\mathbb{R})$

を用いて $a = f_0 U_e + f_1 U_\epsilon$ と表される。以下ではしばしば U_e を 1 と考えて省略し、また U_ϵ も ϵ と略記する。

命題 3.3.4. このとき C^* 環の準同型写像

$$\rho : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathfrak{K}$$

が一意的に存在し、急減少関数 f_0, f_1 に対しては

$$\rho(f_0 U_e + f_1 U_\epsilon) = f_0(D) + f_1(D)\epsilon$$

が成立つ。この ρ を D の定める指数準同型写像とよぶ。

この ρ を用いて Dirac 作用素 D の指数を定義する。そのために $C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ の K 群を調べよう。これに関して C^* 環の準同型

$$\sigma : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}, \quad \sigma(f_0 + f_1\epsilon) = f_0(0) + f_1(0)$$

が存在し、この準同型写像 σ_* が実は K 群の同型を導くことが確かめられる。即ち、$K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}$, $K_1(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2) = 0$ が成り立つ。いま、この同型を通じて $1 \in K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ に対応する $K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2)$ の生成元を e と表そう。

定義 3.3.5. 偶数次元多様体上の *Dirac* 作用素 D に対し、指数準同型 ρ を用いて

$$\operatorname{Ind} D = \rho(e) \in K_0(\mathfrak{K}) = \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

と定める。これを D の指数という。

ここで生成元 $e \in K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2)$ の具体的な表示をひとつ与えておく。いま

$$e_x = \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} + \frac{1-x^2}{2(1+x^2)}\epsilon, \qquad e_1 = \frac{1-\epsilon}{2}$$

とおくと、e_x と e_1 はともに射影元である。そして $\lim_{x\to\pm\infty} e_x = e_1$ であるので、相対 K 群の元として [Bl86, §5.4]

$$e_x - e_1 \in K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2)$$

が定まる。これが生成元 e のひとつの表示である（他の表示についても後述する)。

奇数次元多様体上の Dirac 作用素 D に対しても指数を定義しておこう。(ただし奇数次元コンパクト多様体上では、これから定義する指数は自明となる)。奇数次元多様体上の Dirac 作用素に関して次数作用素は存在しないが、D に依存する準同型（これも指数準同型と呼ぶ)

$$\rho : K_*(C_o(\mathbb{R})) \to K_*(\mathfrak{K})$$

が存在する。ここで $K_1(C_o(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ の生成元 u を用いて

$$\operatorname{Ind} D = \rho(u) \in K_1(\mathfrak{K}) \tag{3.2}$$

と定める。コンパクト作用素全体の C^* 環 $\mathfrak{K}$ については $K_1(\mathfrak{K}) = 0$ なので、今の場合は常に $\operatorname{Ind} D = 0$ である。

さて偶数次元の場合に話を戻す。このとき Dirac 作用素は

$$D=\begin{pmatrix}0 & D^-\\ D^+ & 0\end{pmatrix},\qquad (D^+)^*=D^-$$

という形をしており、その指数は

$$\operatorname{Ind} D=\dim\ker D^+-\dim\ker D^-$$

と定義されていた。この定義との整合性を調べてみよう。まず

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in C_o(\mathbb{R})\otimes M_2(\mathbb{C}):\ a,\ d\text{ は偶関数、}c,\ d\text{ は奇関数}\right\}$$

とおくとき、同型写像

$$\iota: C_o(\mathbb{R})\rtimes\mathbb{Z}_2\to\mathcal{A}$$

が

$$\iota(f)=\begin{pmatrix}f^{ev} & f^{odd}\\ f^{odd} & f^{ev}\end{pmatrix},\qquad \iota(\epsilon)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

により与えられることを注意しよう。但し $f\in C_o(\mathbb{R})$ に対して、$f^{ev}(x)=(f(x)+f(-x))/2$、$f^{odd}(x)=(f(x)-f(-x))/2$ とおいた。ここで次の条件を満足する $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $\varphi,\ \psi$ を選んでおく：

1) φ は偶関数、ψ は奇関数である；

2) $0\le\varphi(x)\le 1$ $(x\in\mathbb{R})$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(\pm\infty)=1$, $\psi^2=\varphi(1-\varphi)$ が成立つ。

このとき

$$e_x=\begin{pmatrix}1-\varphi & \psi\\ \psi & \varphi\end{pmatrix},\quad e_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\tag{3.3}$$

は容易に確かめられるように射影元であり、さらに $e_x-e_1\in\mathcal{A}$ が成り立つ。このことから e_x-e_1 は $K_0(\mathcal{A})$ の元を定め、さらに $e_x-e_1\in K_0(\mathcal{A})$ は生成元であることが確かめられる。そして先に選んだ生成元 $e\in K_0(C_o(\mathbb{R})\rtimes\mathbb{Z}_2)$ は、同型写像 $\iota: C_o(\mathbb{R})\rtimes\mathbb{Z}_2\to\mathcal{A}$ を通じて $e_x-e_1\in K_0(\mathcal{A})$ に対応する。従ってこの同一視の下で、$\operatorname{Ind} D=\rho(e_x)-\rho(e_1)\in K_0(\mathfrak{K})$ が成り立つ。いま上の条件 1) 2) に加えて $1-\varphi$ の台が 0 の十分小さい近傍に含まれると仮定しよう。すると D に関する固有値 λ $(\lambda\ne 0)$ の空間 V_λ 上では

$$\rho(e_x)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\rho(e_1)$$

となり、固有値 0 の空間、即ち $\ker D$ 上では

$$\rho(e_x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \rho(e_1)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となる。従って Tr が導く同型写像を用いて $K_0(\mathfrak{K})$ と $\mathbb{Z}$ を同一視するとき、

$$\operatorname{Tr}(\rho(e_x)-\rho(e_1))=\operatorname{Tr}(\rho(e_x)|\ker D-\rho(e_1)|\ker D)=\dim\ker D^+-\dim\ker D^-$$

が成り立つ。

この議論おいては、固有値0がDの孤立した点スペクトルという性質が肝要であることに注意しておく。

4. 群作用と指数定理

4.1. G **同変指数定理.** Atiyah と Singer は指数定理を以下のような作用素へさらに拡張した：

- コンパクト多様体上のコンパクトなリー群あるいは有限群作用と同変な作用素；
- 正規被覆空間 $M \to M/\Gamma$ に持ち上げられた作用素；
- 作用素の族 $(D_x)_{x\in X}$.

第一の場合を考えよう。このとき作用素の指数は群の表現空間の差として定義される。いまコンパクトリー群Gが多様体に作用しており、作用素DはG作用について同変であると仮定する。このときDのG同変指数を

$$\mathrm{Ind}_G D = \ker D^+ - \ker D^- \in R(G)$$

と定義する。つまり$\ker D^+$ と $\ker D^-$ を G の表現空間と見なし、その形式的な差を G の表現環 $R(G)$ の元と考えるのである。ここで $R(G)$ は、Gの既約表現全体を基底として $\mathbb{Z}$ 上生成される自由アーベル群を表す。

次にC^*環のK群を用いてG同変指数を定義しよう。一般にリー群や無限離散群が局所コンパクトハウスドルフ空間Xに作用しているとき、接合積と呼ばれるC^*環$C_o(X)\rtimes G$が定義される。いまリー群Gが一点に作用していると考えて、(被約な)接合積をつくる。これを被約C^*群環とよび、一般にC_r^*Gと表す。ただし本論説では簡単のために単にC^*Gと表すことにしよう。このC^*環は、コンパクト台を持つG上の連続関数たちに合成積 (convolution product)

$$(\varphi * \psi)(g) = \int_G \varphi(gh^{-1})\psi(h)dh$$

を導入して、$L^2(G)$上の作用素ノルムによりC^*完備化を行って得られるC^*環としても定義される。そしてGがコンパクトのとき、その構造はよく判っている。いまGの既約表現全体の集合を$\widehat{G}$とする。このときC^*Gは、既約表現$V\in\widehat{G}$の準同型環$\mathrm{End}(V)$がつくる直和$\bigoplus_{V\in\widehat{G}}\mathrm{End}(V)$を$C^*$完備化した環と同型になる。このとき$\mathrm{End}(V)$は有限次元の行列環に同型であり、従って$\mathbb{C}$と強森田同値である。強森田同値な$C^*$環の$K$群は自然に同型となるから、結局

$$K_0(C^*G) = \bigoplus_{V\in\widehat{G}} K_0(\mathrm{End}(V)) = \bigoplus_{\widehat{G}}\mathbb{Z} = R(G)$$

が成立つ。より具体的に述べるならば、既約表現$V\in R(G)$と、C^*Gの直和因子$\mathrm{End}(V)$に属する階数1の射影元が互いに対応している。

ここでG同変なDirac作用素Dが与えられたとしよう。この場合にも指数準同型が定義され、Dの指数が定まる。実際指数準同型は

$$\rho : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathfrak{K}\otimes C^*G$$

として与えられ、$K_0(\mathfrak{K}\otimes C^*G)\cong K_0(C^*G)$ の元として指数が定義される。このときも固有値 0 が D の孤立した点スペクトルであることから、既約表現と階数 1 の射影元の同一視の下に $R(G)$ に属する Atiyah-Singer の G 同変指数と $K_0(C^*G)$ に属する指数が一致することを証明できる。

さて Atiyah-Segal-Singer で示されたように、G 同変指数定理においては作用素の G 同変指数が定める G 表現の指標を、G の固定点集合の情報を用いて記述することが可能であった。この G 同変指数が定める G 表現の指標と $K_0(C^*G)$ の元である指数の関係を述べよう。

一般に C^* 環 $\mathcal{A}$ が与えられたとき、連続汎関数 $\tau:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ で

$$\tau(ab)-\tau(ba)=0,\qquad a,b\in\mathcal{A}$$

であるものを $\mathcal{A}$ のトレイスという。このとき射影元 $e\in\mathcal{A}$ に $\tau(e)$ を対応させることで、τ は加法的写像

$$\tau: K_0(\mathcal{A})\to\mathbb{C}$$

を誘導する。つまり同値な射影元に対して τ は同一の値を与える。これは、巡回コホモロジー群と K 群の対写像に関する最も重要かつ簡単な例を示しているので、この事実を命題として挙げておこう。

命題 4.1.1. いま $\mathcal{A}$ を（単位元を持つ）C^* 環とし、$\tau:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ をトレイスとする。このとき 2 つの射影元 e_0, e_1 が $K_0(\mathcal{A})$ の同じ元を定めていれば、

$$\tau(e_0)=\tau(e_1)$$

が成り立つ。

Proof. まず 2 つの射影元 e_0, e_1 が K_0 群において同値であるとは、（必要ならば行列環とのテンソル積 $\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$ を考えて）e_0 と e_1 を端点とする射影元の連続な族 $(e_t)_{t\in[0,1]}$ が存在することであった。このとき族 $e=(e_t)$ が $t\in[0,1]$ に関して微分可能であるとしておこう。いま t に関する e の微分を $\dot{e}$ で表しておくと

$$\tau(e_1)-\tau(e_0)=\int_0^1\tau(\dot{e})dt$$

となる。ここで $\dot{e}=(e^2)^{\cdot}=\dot{e}e+e\dot{e}$ より $\dot{e}=[\dot{e}(2e-1),e]$ に注意すると

$$\tau(\dot{e})=\tau([\dot{e}(2e-1),e])=0$$

となり、$\tau(e_0)=\tau(e_1)$ が成り立つ。 □

さて C^*G の元 a に対して $\mathrm{End}(V_\lambda)$ における直和成分 a_λ をとり、$\tau_\lambda(a)=\mathrm{Tr}\,a_\lambda$ とおく。ここで Tr は行列に対する通常のトレイスである。このとき各既約表現 V_λ に対して定まる τ_λ が C^*G 上のトレイスを定めることは明らかである。従って上の命題より τ_λ は $K_0(C^*G)$ から $\mathbb{C}$ への写像を与える。いま V を任意の G 表現として、これを $\sum_\lambda n_\lambda V_\lambda$ と既約分解しておく。ここで $\mathrm{End}(V_\lambda)$ に属する階数 1 の射影元を e_λ とすれば、V に対応する射影元 e_V は $\sum n_\lambda e_\lambda$ で与えられる。このとき $\tau_\lambda(e_V)=n_\lambda$ が成り立つ。故に $K_0(C^*G)$ の元 e に

対して $\tau_\lambda(e)$ の値をすべて求めれば、e が決定されることになる。一方表現論でよく知られるように、コンパクト群の表現空間 V は指標 $\mathrm{Tr}\,(g|V)$ を求めることで一意に決定される。したがって作用素 D の G 同変指数を G の表現空間と考えて指標を計算することと、$K_0(C^*G)$ の元である D の指数を τ_λ に代入して値を計算することは同値になる。こうして我々の定義した指数と Atiyah-Segal-Singer の G 同変指数を結びつけることが出来る。

4.2. Γ 指数定理. 次に正規被覆空間 $M \to M/\Gamma$ に持ち上げられた作用素に対する指数定理を考えよう。正規被覆空間とは離散群 Γ の自由かつ固有な作用をもつ空間 M のことをいう。ここで M/Γ は作用に関する商空間を表す。このとき Γ が有限群ならば、指数定理は前節の G 同変指数定理に帰着する。ここで興味があるのは Γ が無限群の場合である。

多様体 M がコンパクトのとき、自己共役な正値楕円型微分作用素 D^2 の熱核 e^{-tD^2} は trace class に属する作用素となる。従って偶数次元の多様体上の Dirac 作用素 D とその次数作用素 ϵ に関して、ϵe^{-tD^2} は trace class に属する作用素であり、このとき

$$\mathrm{Ind}\, D = \mathrm{Tr}\,(\epsilon e^{-tD^2}) \qquad (t > 0)$$

が成り立つ。射影元 (3.3) を表す関数 φ, ψ を $1-\varphi(x) = e^{-tx^2}$ と選んでおけば、$\mathrm{Tr}\,(\rho(e)) = \mathrm{Tr}\,(\epsilon e^{-tD^2})$ となり上式が導かれる。従って命題 4.1.1 により、この値は $t > 0$ によらない。ここで D^2 に関する固有値 $\lambda \geq 0$ の固有空間上で e^{-tD^2} は $e^{-t\lambda}$ 倍として作用するから、$\ker D^+$ 上への射影作用素 e_+ と $\ker D^-$ 上への射影作用素 e_- を用いて $t \to +\infty$ における ϵe^{-tD^2} の極限を

$$\lim_{t\to+\infty} \epsilon e^{-tD^2} = \begin{pmatrix} e_+ & 0 \\ 0 & -e_- \end{pmatrix}$$

と表すことが出来る。従ってトレイスをとって

$$\mathrm{Tr}\,(\epsilon e^{-tD^2}) = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-$$

が成立つ。一方 $t \to 0$ とすると ϵe^{-tD^2} の核関数は $M \times M$ の対角部分に集中する。ここで対角部分の各点 $x \in M$ においてトレイス Tr_x をとると $t \to 0$ で極限が存在し、その極限は指数定理に現れた $\widehat{A}$ 型式 $\widehat{A}(M)$ に一致することが証明される。従って

$$\mathrm{Ind}\, D = \int_M \widehat{A}(M)$$

が成り立つ。これが Patodi や Atiyah-Bott-Patodi による指数定理の証明の概略である。ここで熱核 e^{-tD^2} 自体に関しては、$t \to 0$ のとき $\mathrm{Tr}_x\, e^{-tD^2}$ の値は発散することを注意しておく。ところが次数作用素 ϵ をかけてトレイスをとると、$t \to 0$ のとき

$$\mathrm{Tr}\,(\epsilon e^{-tD^2}) = \mathrm{Tr}\,(e^{-tD^-D^+}) - \mathrm{Tr}\,(e^{-tD^+D^-}) = \infty - \infty$$

という打ち消しが起こり、その差として残された有限量が作用素の指数であると了解される。

恐らくはこの証明からの示唆も得て Atiyah [A76] は被覆空間へ持ち上げられた作用素に対する指数定理を展開した (Singer [S77] も参照せよ)。いま被覆空間 M 上の Dirac 作用素 D から定まる閉部分空間 $\ker D^+$, $\ker D^-$ 上への射影作用素を e_+, e_- とする。ここ

で被覆変換群 Γ の von Neumann 群環 $W^*\Gamma$ と有界作用素全体のなす von Neumann 環 $\mathcal{L}$ のテンソル積を $W^*\Gamma\otimes\mathcal{L}$ と表す。このとき Atiyah は e_+, e_- が、$W^*\Gamma\otimes\mathcal{L}$ に属することを確かめ、この von Neumann 環のトレイス τ を用いて D の Γ 指数を

$$\mathrm{Ind}_\Gamma D=\tau(e_+)-\tau(e_-)$$

と定義し、さらに

$$\mathrm{Ind}_\Gamma D=\int_{M(\Gamma)}dx\ \mathrm{Tr}_x(\epsilon k_t(x,x))$$

が $t>0$ に依らず成り立つことを示した。ここで $k_t(x,y)$ は e^{-tD^2} の積分核を表し、$M(\Gamma)$ は M に作用する被覆変換群 Γ の基本領域を表す。

この定理を我々が定義した指数を用いて理解し直そう。被覆変換群 Γ が M に作用するとき、$M\times M$ 上の連続関数 k で：

1) $k(x\gamma,y\gamma)=k(x,y)$, $(x,y)\in M\times M$, $\gamma\in\Gamma$;
2) 上で与えた対角作用の下で k を $(M\times M)/\Gamma$ 上の連続関数とみるとき、その台はコンパクト；

であるような k を核関数とする $L^2(M)$ 上の作用素の集合を考え、これを C^* 完備化して得られる C^* 環 $\mathfrak{K}_\Gamma$ を用意しておく。正確にはベクトル束 $S\to M$ を係数とする Hilbert 空間 $L^2(M,S)$ を考えるべきであるが簡単のために S を省略する。この $\mathfrak{K}_\Gamma$ をさらに von Neumann 環に完備化したものが前述の $W^*\Gamma\otimes\mathcal{L}$ である。そして $\mathfrak{K}_\Gamma$ 上のトレイス τ : $\mathfrak{K}_\Gamma\to\mathbb{C}$ を

$$\tau(k)=\int_{M(\Gamma)}dxk(x,x)$$

により与える。ここで $M(\Gamma)$ は M 上の Γ 作用に関する基本領域を表す。断面曲率が有界な完備リーマン多様体上では Dirac 作用素に対して指数準同型

$$\rho:C_o(\mathbb{R})\rtimes\mathbb{Z}_2\to\mathfrak{K}_\Gamma$$

が定まる。この指数準同型を用いると von Neumann 環 $W^*\Gamma\otimes\mathcal{L}$ を経由せずに $\tau(\mathrm{Ind}\,D)$ が定まり、作用素の表象計算を行って Atiyah による Γ 指数定理

$$\tau(\mathrm{Ind}\,D)=\int_{M/\Gamma}\hat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right)$$

が証明される。ここでトレイス τ で値をとる以前に $\mathrm{Ind}\,D$ は既に $K_0(\mathfrak{K}_\Gamma)$ の元として定義されていることに注意する。実際上の指数準同型を用いて前と同様にすればよい。、このとき C^* 群環 $\mathfrak{K}_\Gamma$ は $C^*\Gamma$ に強森田同値なので、それらの K 群は自然に同型である。従って与えられた被覆空間 $M\to M/\Gamma$ の不変量として $\mathrm{Ind}\,D\in K_0(C^*\Gamma)$ が定義されることになる。

また奇数次元多様体上の Dirac 作用素に対する指数準同型

$$\rho:C_o(\mathbb{R})\to\mathfrak{K}_\Gamma$$

を用いると定義3.2と同様にして、$\mathrm{Ind}\, D \in K_1(C^*\Gamma)$ が定義されることに注意しておく。C^* 環が $\mathfrak{K}$ のとき、即ち群 Γ が自明のとき指数 $\mathrm{Ind}\, D \in K_1(\mathfrak{K})$ は常に0であったが、一般の C^* 群環に対してこの指数は必ずしも自明ではない。例えば被覆空間 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の作用素 $D = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ に対して $\mathrm{Ind}\, D$ が非自明であることをフーリエ変換を用いて証明できる。さらにこの D の定める指数準同型 $\rho : K_1(C_o(\mathbb{R})) \to K_1(C^*\mathbb{Z})$ は同型写像であることも示される。

4.3. 等質空間上の Connes-Moscovici 指数定理. Connes-Moscovici [CM82] はコンパクトとは限らないユニモジュラーリー群 G の等質空間 G/H 上で G 同変指数定理を展開した。まず G をユニモジュラーリー群、H をそのコンパクト部分群として、等質空間 $M = G/H$ を考える。ここで G 上に与えられた不変測度 dg、体積1に正規化された H 上の不変測度 dh を固定して、M 上の G 不変測度 ω_M を $dg = \omega_M dh$ であるように選んでおく。さらに M 上に G 不変なリーマン計量を選んでおき、M 上のスピン束 $S \to M$ に作用する Dirac 作用素 D を考えよう。このとき D の指数が住む C^* 環を以下のように定める。まず φ をコンパクト台を持つ G 上の連続関数とすると、

$$k(x,y) = \varphi(xy^{-1}), \quad x, y \in G$$

は G の対角作用で不変な $M \times M$ 上の関数となり、これを核関数として k は $L^2(G)$ 上の作用素を定める。このようにして $C_c(G)$ の元が定める作用素の集合の C^* 閉包をとって得られる C^* 環を C^*G と表す。これは $C_c(G)$ に合成積を入れて定義される G の被約 C^* 群環と同型となる。そしてトレイス $\tau : C^*G \to \mathbb{C}$ を

$$\tau(\varphi) = \varphi(e) \quad (\ e \in G \text{ は単位元})$$

として定める。ここで τ は ∞ も値に許すトレイスである。実はこのことが非可換'微分'幾何学の構築と密接に関わってくるので、その様子を次の例で詳細に調べてみよう。

まず $G = \mathbb{R}$ とするとフーリエ変換により $C^*\mathbb{R}$ は $C_o(\mathbb{R})$ に同型となる。この同型を通じて $C^*\mathbb{R}$ のトレイス τ は $C_o(\mathbb{R})$ のトレイス：

$$\hat{\tau} : C_o(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \qquad \hat{\tau}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$$

に対応する。この $\hat{\tau}$ の定義をみれば、τ の値として ∞ も許さなければならないことが了解されるであろう。$\mathbb{R}$ 上の関数が無限遠点で0であっても、その $\mathbb{R}$ 上の積分は有限とは限らないからである。このとき $C_o(\mathbb{R})$ の中で $\hat{\tau}$ の値が有限な関数だけを取り出すことが、連続関数環に含まれる微分可能な関数だけを取り出すという微分幾何学の態度に対応していると考えられる。このように、一般の C^* 環に対しこのような扱いやすい部分環を取り出すことが、非可換微分幾何学の構築に関わってくる。

さて等質空間 M は偶数次元であると仮定しよう。このとき M 上の Dirac 作用素は G の自然な作用と可換であり、また M への G 作用が固有であることから、Dirac 作用素 D に対して指数準同型

$$\rho : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to C^*G$$

が定義される。そして前と同様に $e \in K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2)$ を生成元として、$\mathrm{Ind}\, D = \rho(e)$ として D の指数を定める。一方 M 上のスピン束 $S \to M$ には自然に G 不変な接続が与えられ、G 不変な曲率 R が定まる。ここで G のリー環 $\mathfrak{g}$ において H のリー環 $\mathfrak{h}$ に関する直交補空間を $\mathfrak{m}$ と表す。このとき不変曲率 R は $\bigwedge^2 \mathfrak{m}^* \otimes \mathrm{End}(S_e)$ の元と見なされる。そして巾級数 $f(x) = \dfrac{x/2}{\sinh x/2}$ を用いて $\hat{A}$ 型式とよぶ M 上の不変微分型式を

$$\hat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right) = \det{}^{1/2} f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right) \in \bigwedge^* \mathfrak{m}^*$$

で与えるとき、次の定理が成り立つ。

定理 4.3.1 (Connes-Moscovici [CM82]**).**

$$\tau(\mathrm{Ind}\, D) = \hat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right) \Big/ \omega_M.$$

右辺は $\hat{A}$ 型式の最高次の項を不変測度 ω_M を用いて表すときの係数を意味する。

ここで $\mathrm{Ind}\, D$ は C^* 群環 C^*G の射影元の差として定められたが、これを von Neumann 群環 W^*G の射影元の差と考える。いま $\ker D^+$, $\ker D^-$ 上への射影作用素をそれぞれ e_+, e_- と表すと、この $\mathrm{Ind}\, D$ は $e_+ - e_-$ に同値となる。従って定理 4.3.1 を用いると、右辺の幾何不変量が非自明ならば $\ker D^+$ あるいは $\ker D^-$ が非自明な G 表現であることが判る。この定理に先立って、半単純リー群 G の cocompact な離散部分群 Γ に対する Γ 指数定理を用いることで、Atiyah-Schmid は半単純リー群 G の任意の離散系列表現が適当な作用素 D の $\ker D$ として実現されることを証明した。離散系列表現をこのように幾何的に実現することは、半単純とは限らないリー群に対しても望まれるところである。しかし一般のリー群に対して cocompact な離散部分群の存在は期待できないので、上の議論はそのままでは通用しない。この点を克服することが、上述の指数定理に対する Connes-Moscovici の動機につながっていると推測される。

5. スペクトル流とエータ不変量

5.1. スペクトル流. 作用素の 1 径数族 $(A_t)_{t\in[0,1]}$ が与えられたとする．ここで各 A_t は有限重複度の離散固有値のみをもつ自己共役作用素と仮定しよう．応用上はディラック作用素のような，閉多様体上の自己共役な楕円型微分作用素を考える．このとき t が変化するにつれて固有値の集合 $\sigma(A_t) \subset \mathbb{R}$ の分布も変化する．いま $\sigma(A_t)$ を $C = [0,1] \times \mathbb{R}$ に含まれる 1-チェイン σ と考える．

定義 5.1.1. 上のような作用素族 $(A_t)_{t\in[0,1]}$ に関し A_0, A_1 が可逆，即ち A_0, A_1 は 0 を固有値にもたないと仮定する．すると σ は空間対 $(C, C\setminus([0,1]\times\{0\}))$ の相対 1-サイクルを与える．このとき $[\sigma] \in H_1(C, C\setminus([0,1]\times\{0\})) = \mathbb{Z}$ として定まる整数を $(A_t)_{t\in[0,1]}$ のスペクトル流とよび，$sf\{A_t\}$ で表す．

幾何的に言えばスペクトル流とは負から正に0を横切ってゆく固有値の数，あるいは固有値の流れを示すσと$[0,1]\times\{0\}$の交点数を与えていると考えられる．

例 5.1.2. S^1に対し$L^2(S^1)$上の自己共役作用素の族

$$A_t=\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+t,\qquad -1/2\leq 0\leq 1/2$$

をとる．このとき$sf\{A_t\}=1$が成り立つ．さらに$S^1\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上のベクトル束

$$E=(S^1\times\mathbb{R}\times\mathbb{C})/\sim,\qquad (x,y,z)\sim(x,y+1,e^{2\pi iy}z)$$

を考える．いま$E_y=E|_{S^1\times\{y\}}$ $(y\in\mathbb{R}/\mathbb{Z})$とおき，$E_y$の$L^2$切断全体のなすヒルベルト空間を$\mathcal{H}_y$と表す．$E_y$は$S^1\times\{y\}$上で平坦であるから，$S^1$方向の微分$-id/dx$は$\mathcal{H}_y$上の自己共役作用素$A_y$を自然に定める．ここでヒルベルト空間の族$(\mathcal{H}_y)$を$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上のヒルベルト空間束と考える．ヒルベルト空間束に対しては自明化が一意に存在する．従って作用素族(A_y)を同一ヒルベルト空間上の作用素族と見直すことができる．このとき$sf\{A_y\}_{y\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}}=1$が成り立つ．この作用素族は$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$から本質的に非定値な自己共役フレドホルム作用素全体の空間$Fred_*$への連続写像を定め，それは$\pi_1(Fred_*)=\mathbb{Z}$の生成元を与えている．

例 5.1.3. 偶数次元で境界のないコンパクト多様体上のディラック作用素を用いて

$$A_t=\begin{pmatrix} t & D^- \\ D^+ & -t \end{pmatrix}\qquad (t\in[-1,1])$$

と定める．このとき$sf\{A_t\}=\dim\ker D^+-\dim\ker D^-$が成り立つ．

5.2. スペクトル回転数. 作用素の2径数族$(A_{(s,t)})_{(s,t)\in I\times I}$，$I=[0,1]$を考える．ここで$A_{(s,t)}$は

$$A_{(s,t)}=\begin{pmatrix} 0 & D^-_{(s,t)} \\ D^+_{(s,t)} & 0 \end{pmatrix}$$

という形をしており，さらに境界$\partial(I\times I)$上で$A_{(s,t)}$は可逆であると仮定する．ここで連続写像$f:I\times I\to Fred$,　$f(s,t)=D^+_{(s,t)}$を用いて

$$sf\{A_{(s,t)}\}=f\text{ と }Fred^{(1)}\text{ の交点数}$$

と定める．ただし$Fred^{(1)}=\{D\in Fred\mid \mathrm{Ind}\,D=0,\ \dim\ker D\geq 1\}$である．これは$K^0(I\times I)=\mathbb{Z}$の元として定まる作用素族$(A_{(s,t)})$の族指数に他ならない．

これはスペクトル回転数としても了解できる．いま$\partial(I\times I)$上で$A_{(s,t)}$は可逆だから，このとき$D^+_{(s,t)}$の固有値$\sigma(D^+_{(s,t)})$は$\mathbb{C}\setminus\{0\}$に含まれる．これを$\partial(I\times I)$からの写像と考えると，$\mathbb{C}\setminus\{0\}$の1-サイクルσが定まる．このとき$[\sigma]\in H_1(\mathbb{C}\setminus\{0\})=\mathbb{Z}$として定まる整数をスペクトル回転数ということにすると，2径数作用素族$(A_{(s,t)})$の不変量$sf\{A_{(s,t)}\}$はスペクトル回転数に等しい．幾何的に言えばスペクトル回転数とは$\partial(I\times I)$上で固有値$\sigma(D^+_{(s,t)})$が動くときの原点の周りの回転数と考えられる．

例 5.2.1. 与えられた $w \in \mathbb{C}$ に対して $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の平坦な複素直線束を

$$L_w = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}/\sim \to T^2, \qquad (z,\zeta) \sim (z+g, e^{-2\pi i\langle g,w\rangle}\zeta)$$

で定める．ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は通常の内積を表し，$g=(n,m) \in \mathbb{Z}^2, w = u+iv$ に対して $\langle g,w\rangle = nu+mv$ である．いま L_w の平坦接続を用いて定まる *Dolbeault* 作用素を $\bar\partial_w : \Omega^{0,0}(T^2, L_w) \to \Omega^{0,1}(T^2, L_w)$ とする．ここで十分小さな $\epsilon > 0$ をとり，$D = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \le \epsilon\}$ 上の 2 径数作用素族 $(A_w)_{w\in D}$ を

$$A_w = \begin{pmatrix} 0 & \bar\partial_w^* \\ \bar\partial_w & 0 \end{pmatrix}$$

で与える．このとき $w \neq 0$ で A_w は可逆であり，$w = 0$ で $\dim\ker\bar\partial_w = \dim\ker\bar\partial_w^* = 1$ となる．ここで定数関数 1 を $d\bar z$ に対応させ，$\Omega^{0,0}(T^2, L_w)$ と $\Omega^{0,1}(T^2, L_w)$ を同一視する．いま $\mathbb{R}^2$ 上で $\bar\partial_w$ を考えよう．すると $\Omega^{0,0}(T^2, L_w)$ や $\Omega^{0,1}(T^2, L_w)$ の元は

$$(*) \qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \qquad f(z+g) = e^{-2\pi i\langle g,w\rangle}f(z) \quad (z = x+iy \in \mathbb{R}^2)$$

をみたす関数と同一視される．さらに $\bar\partial_w$ は $\mathbb{R}^2$ 上の *Cauchy-Riemann* 作用素 $\partial/\partial\bar z$ に対応する．ここで $f_0(z) = e^{-2\pi i\langle z,w\rangle}$ とすると，$k,l \in \mathbb{Z}$ に対して定まる関数 $e^{2\pi i(kx+ly)}f_0(z)$ は条件(*) をみたし，さらに

$$\partial(e^{2\pi i(kx+ly)}f_0)/\partial\bar z = i\pi(k+il-w)e^{2\pi i(kx+ly)}f_0(z)$$

が成り立つ．このとき $\{e^{2\pi i(kx+ly)}f_0(z) \mid k,l \in \mathbb{Z}\}$ は完全正規直交系を成し，$\bar\partial_w$ の固有値は $\{i\pi(k+il-w)\}$ で与えられる．従って $w \in \partial D$ 上で $(\bar\partial_w)$ のスペクトル回転数は 1 であるから，$sf\{A_w\} = 1$ が成り立つ．

5.3. エータ不変量と Atiyah-Patodi-Singer 指数定理. スペクトル流は Chern-Simons 不変量やエータ不変量という二次不変量と密接に結びついている．いま閉多様体 M 上で自己共役な楕円型作用素 A が与えられたとする．ここで固有値の集合を $\sigma(A)$ とするとき，無限級数

$$\sum_{\lambda\in\sigma(A),\lambda\neq 0} \mathrm{sgn}(\lambda)|\lambda|^{-s}$$

は実部が十分大きな複素数 s に対して収束する．ここで $\mathrm{sgn}(\lambda)$ は実数 λ の符号を表す．この関数はさらに $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続され，その有理型関数は $s=0$ に極をもたないことが知られている．これを A のエータ関数といい，$\eta_A(s)$ で表す．

定義 5.3.1. 自己共役な楕円型作用素 A に対してエータ不変量[5]を次のように定める．

$$\frac{1}{2}\eta_A = (\eta_A(0) - \dim\ker A)$$

[5] Gilkey に従ってこのように正規化する．これは Atiyah-Patodi-Singer [APS75] の ξ 不変量に対応する．

次にディラック作用素 D を考えよう．ここでベクトル束 E とスピン束 S のテンソル積を作り，E のユニタリ接続 ∇ を用いて D を $E \otimes S$ の切断空間上の作用素に拡張できる．いまユニタリ接続の 1 径数族 $\{\nabla^{(t)}\}_{t\in[0,1]}$ を選び，これに応じてディラック作用素の族 (D_t) が定まったとする．このときエータ不変量の族 $\eta(D_t)$ が定まる．これは t に関して一般に連続ではなく，t が変化すると整数値の飛躍が生じ得る．この $\eta(D_t)$ について，t が変化するときに生じる整数値の飛躍はスペクトル流 $sf\{D_t\}$ に等しいことが確かめられる．一方 t に関する微分 $\dot{\eta}(D_t)$ は t に関して連続である．そして $\int_0^1 \dot{\eta}(D_t)dt$ は以下に述べる Chern-Simons 不変量で記述される．いま Chern 類の多項式である Chern 指標 ch に関して，E のユニタリ接続の 1 径数族 $\nabla^{(t)}$ から定まる Chern-Simons 不変量を $Tch(\nabla^{(0)}, \nabla^{(1)})$ で表す．これは M の微分型式であり，次の等式をみたす．

$$ch(\nabla^{(1)}) - ch(\nabla^{(0)}) = d[Tch(\nabla^{(0)}, \nabla^{(1)})]$$

定理 5.3.2 (Atiyah-Patodi-Singer [APS75]**).** このとき以下が成立する．

$$\eta(D_1) - \eta(D_0) + sf\{D_t\} = \int_0^1 \dot{\eta}(D_t)dt = \int_M \widehat{A}(M)Tch(\nabla^{(0)}, \nabla^{(1)})$$

ただし $\widehat{A}(M)$ は M のリーマン曲率から定まる $\widehat{A}$ 型式と呼ばれる閉型式である．

5.4. II 型スペクトル流と相対エータ不変量. まずスペクトル流を積分形で表してみる．まず $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 関数の族 $\{\rho_\epsilon(x)\}_{0<\epsilon<1}$ を，$\mathrm{supp}\ \rho_\epsilon \subset [-\epsilon, \epsilon]$, $\int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(x)dx = 1$ であるように選んでおく．ここで先の仮定をみたすような作用素の 1 径数族 $(A_t)_{t\in[0,1]}$ が与えられたとする．

命題 5.4.1. このときスペクトル流に関して

$$sf\{A_t\} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^1 \mathrm{Tr}\,(\rho_\epsilon(A_t)\dot{A}_t)dt$$

が成り立つ．ここで $\rho_\epsilon(A_t)$ は $\rho_\epsilon(x)$ に A_t を代入して得られる作用素であり，$\dot{A}_t$ は t に関する微分を表す．

スペクトル流を上のように書き直すと，これを用いて II 型フォン・ノイマン環上のフレドホルム作用素族に関して II 型スペクトル流が定義できる．いま M を閉多様体とし，$\widetilde{M}$ が被覆変換群 Γ をもつ M の正規被覆空間であるとする．そして M にリーマン計量を与えておき，それを $\widetilde{M}$ に引き上げておく．ここで連続関数 $k : \widetilde{M} \times \widetilde{M} \to \mathbb{C}$ に対して以下の条件を考える：

1) $k(x\gamma, y\gamma) = k(x, y) \quad (\gamma \in \Gamma)$;
2) k を $(\widetilde{M} \times \widetilde{M})/\Gamma$ 上の連続関数とみたとき，その台はコンパクト．

このような関数を積分核とする $L^2(\widetilde{M})$ 上の作用素全体を考え，これを完備化して得られる C^* 環を $\mathfrak{K}_\Gamma$ と表す．以下ではこの C^* 環を $\mathfrak{K}$ のかわりに用いて，Γ 作用がある空間に対してフレドホルム作用素の概念を拡張する．また $\mathfrak{K}$ がトレイス写像 Tr をもつように，$\mathfrak{K}_\Gamma$ 上にも

$$\tau(k) = \int_{M'} k(x, x)dx$$

によりトレイス写像 τ が定義されることを注意しよう．ただし M' は M 上の Γ 作用に関する基本領域を表す．

いま M 上に自己共役な楕円型作用素の族 $(A_t)_{t\in[0,1]}$ が与えられたとして，これを $\widetilde{M}$ に持ち上げて考えよう．その族を再び (A_t) で表す．

定義 5.4.2. このとき以下を $\mathfrak{K}_\Gamma$ に関する II 型スペクトル流という．

$$sf_\tau\{A_t\} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1 \tau(\rho_\epsilon(A_t)\dot{A}_t)dt$$

以下簡単のためにディラック作用素を考えよう．ここでは M を奇数次元の閉多様体とする．まず平坦接続 ∇ をもつ M 上の平坦束 E を考え，さらに E は自明化をもつと仮定する．ここで E には自明束からの引き戻しとなる自明な接続 d が存在する．いまそれぞれの接続 ∇, d から定まるディラック作用素のエータ不変量を η_∇, η_d で表す．このとき

$$\eta_\nabla - \eta_d \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

を自明化をもつ平坦束 E の相対エータ不変量とよぶ．一方自明化をもつ平坦束 E は $K^1(M,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の元 $[E]$ を定める．またディラック作用素は K ホモロジー群 $K_1(M)$ の元 $[D_M]$ を与える．ここで自然なペアリング $\langle\ ,\ \rangle : K^1(M;\mathbb{R}/\mathbb{Z})\times K_1(M)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ をとると，次の定理が成り立つ．

定理 5.4.3 (Atiyah-Patodi-Singer [APS75]).

$$\langle [E],[D_M]\rangle = \eta_\nabla - \eta_d = \int_M \hat{A}(M)Tch(\nabla, d) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

相対エータ不変量は II 型スペクトル流およびテープリッツ作用素の指数とも関連付けられる．まず E を普遍被覆空間 $\widetilde{M}$ へ引き上げると，平坦接続を用いて自明束との同型が構成できる．このとき定まるホロノミー表現を $\alpha : \pi_1(M)\to U_k$ としよう．一方 E には既に自明化があるので，この二つの自明化の差として

$$\varphi : \widetilde{M}\to U_k, \qquad \varphi(x\gamma) = \varphi(x)\alpha(\gamma)$$

という写像が定まる．ここで $\widetilde{M}$ 上のディラック作用素の正固有空間への射影を P で表し，φ を用いてテープリッツ作用素を $T_\varphi = P\varphi P : \mathrm{im}\,P\to\mathrm{im}\,P$ と定める．そしてトレイス τ を用いて T_φ の Γ 指数を次で定義する：

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(T_\varphi) = \tau(\varphi P\varphi^{-1} - P).$$

定理 5.4.4 (Moriyoshi).

$$\eta_\nabla - \eta_d = \mathrm{Ind}_\Gamma(T_\varphi) = sf_\tau\{D_t\}\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

ここで $(D_t)_{t\in[0,1]}$ は接続の族 $t\nabla + (1-t)d$ より定まるディラック作用素の族である．

5.5. Godbillon-Vey 類と指数定理. 作用素の 2 径数族 $A = (A_{(s,t)})_{(s,t)\in I\times I}$ のスペクトル流も積分表示できる．前と同じく A は

$$A_{(s,t)} = \begin{pmatrix} 0 & D^-_{(s,t)} \\ D^+_{(s,t)} & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられているとする．

命題 5.5.1. スペクトル流に関して

$$sf\{A_{(s,t)}\} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\varepsilon\rho_\epsilon(A^2)(\frac{\partial A}{\partial s}\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial s})\right] dsdt$$

が成り立つ．ここで $\varepsilon = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ である．

これを用いて III 型フォン・ノイマン環に対してスペクトル流を定義しよう．次のような状況を考える．Γ 被覆空間 $\widetilde{M} \to M$ を前のとおりとして，与えられたホロノミー表現 $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Diff}(S^1)$ を用いて平坦 S^1 束

$$N = (\widetilde{M} \times S^1)/\Gamma, \qquad (x,t) \sim (x\gamma, \alpha(\gamma)^{-1}(t))$$

を定める．これは $\widetilde{M} \times \{t\}$ の像を葉とする葉層 S^1 束の構造をもつ．このとき葉層に付随してある C^* 環 $h^*(N,\mathcal{F})$ が定まる．これは

1) 連続関数 $k : M \times M \times S^1 \to \mathbb{C}$ で $k(x\gamma, y\gamma, t\gamma) = k(x,y,t)$, $\gamma \in \Gamma$ をみたし;
2) $M \times M \times \{t\}$ 上では対角 Γ 作用に関して Γ-Hilbert-Shmidt 型作用素の積分核である；

関数 k を核関数とする作用素全体が定める C^* 環である．S^1 上に Γ 不変な測度が存在しないとき，この $h^*(N,\mathcal{F})$ の弱閉包は III 型フォン・ノイマン環となる．ここで荷重 ω : $h^*(N,\mathcal{F}) \to \mathbb{C}$ を

$$\omega(k) = \int_{N'} k(x,x,t)dtdx$$

として与えておく．ここで N' は Γ 作用に関する基本領域である．

次に dt を S^1 の体積要素とし，dx で Γ 不変な $\widetilde{M}$ 上の体積要素を表す．一方 N 上の体積要素を持ち上げて定まる $\widetilde{M}\times S^1$ 上の Γ 不変な体積要素を $d\mu$ として，関数 $\varphi : \widetilde{M}\times S^1 \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi = \frac{dx \times dt}{d\mu}$$

と定める．いま M は偶数次元と仮定する．ここで葉層束 N の葉に沿うディラック作用素の族をとり，これを $\widetilde{M} \times S^1$ へ持ち上げて得られる作用素族 $D = (D_t)_{t\in S^1}$ を考える．そして $[0,1] \times S^1$ 上の作用素の 2 径数族を

$$D_{(s,t)} = s\varphi^i D_t \varphi^{-i} + (1-s)D_t$$

と定める．このとき荷重 ω の定めるスペクトル流を

$$sf_\omega\{D_{(s,t)}\} = \int_{[0,1]\times S^1} \omega\left[\varepsilon\rho_\epsilon(A^2)(\frac{\partial A}{\partial s}\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial s})\right] dsdt$$

と定義する．このとき次の定理が成り立つ．

定理 5.5.2 (Moriyoshi). 葉層の法束 $\nu = TN/T\mathcal{F}$ の *Chern* 類 c_1 から決まる $h^*(N,\mathcal{F})$ 上の巡回 1 コサイクルを τ_ν と表す（[Co86-2] を参照）．また K 群と巡回コホモロジー群の間のペアリング $\langle\ ,\ \rangle : K_1(h^*(N,\mathcal{F})) \times HC^1(h^*(N,\mathcal{F})) \to \mathbb{C}$ を考える．このとき

$$sf_\omega\{D_{(s,t)}\} = \langle \varphi^i D_{(s,t)}\varphi^{-i}D_{(s,t)}^{-1} - 1, \tau_\nu\rangle = \int_N \widehat{A}(M)\mathrm{gv}$$

が成り立つ．ただし gv は葉層束 N の二次特性類である *Godbillon-Vey* 類を表す．

6. 射影的群作用に関する指数定理

6.1. A twisted Γ-index thorem. 変換群 Γ をもつ正規被覆空間 $M \to M/\Gamma$ を考える．さらに $U(1)$ に値をもつ Γ の 2-コサイクル σ をとり，σ で捻った Γ の C^* 群環 $C^*(\Gamma,\sigma)$ を考える．ここで技術的な条件として，σ が $\mathbb{R}$ 値の 2-コサイクル c に持ち上がっていると仮定する．即ち，$\exp(\sqrt{-1}c) = \sigma$ である．このとき微分型式 $\Omega^q(M)$ を係数加群とする群 Γ の二重チェイン複体 $C^p(\Gamma,\Omega^q(M))$ において，c は Γ 不変な M 上の 2 型式 ω とコホモローグになる．さらに σ が定める中心拡大

$$1 \to U(1) \to \widehat{\Gamma} \to \Gamma \to 1$$

に関して，積束 $L = M \times \mathbb{C}$ 上に Γ 作用と両立する $\widehat{\Gamma}$ 作用が定義され，さらにこの作用に関して不変な接続 ∇ が存在する．このとき次の定理が成り立つ．

定理 6.1.1 (Marcolli-Mathai, Moriyoshi). 上で与えられた直線束 L に係数をもつ *Dirac* 作用素を D^∇ とするとき，

1) $\mathrm{Ind}\, D^\nabla \in K_0(C^*(\Gamma,\sigma))$ であり；
2) τ を $C^*(\Gamma,\sigma)$ のトレイスとし $R = \nabla^2 = \sqrt{-1}\omega$ とすると，以下が成り立つ．

$$\tau(\mathrm{Ind}\, D^\nabla) = \int_{M/\Gamma} \widehat{A}(M/\Gamma)e^{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R}$$

この定理の応用として次の結果が成り立つ．

系 6.1.2. シンプレクティック閉多様体 M が *aspherical,* 即ちその普遍被覆空間が可縮ならば，M は正スカラー曲率をもつリーマン計量を許容しない．

ここで M はスピン多様体でなくともよい点を注意しておく．この結果は，任意の closed aspherial manifold は正スカラー曲率をもつリーマン計量を許容しないだろうという Gromov-Lawson 予想の部分的解決になっている．

6.2. 非可換トーラス上の指数定理. アーベル群 $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ 上の 2-cocycle

$$\sigma(g,h) = e^{2\pi i\theta\langle g,h\rangle}$$

を考える．ここで $\langle g,h\rangle$ は $\mathbb{R}^2$ 上の標準的 symplectic form であった．このとき σ が定める中心拡大 $\widehat{\Gamma}$ はハイゼンベルグ群であり，このときの曲率は $\nabla^2 = -\sqrt{-1}\theta dxdy$ となり，従って

$$\tau(\mathrm{Ind}\, D^\nabla) = \int_{\mathbb{R}^2/\Gamma} \theta dxdy = \theta$$

となる．前に述べたように C^* 環 $C^*(G,\sigma)$ は非可換トーラス $\mathcal{A}_\theta$ と同型になる．一方 $\mathcal{A}_\theta$ の K 群はトーラスの位相的 K 群と同型：であり，さらに K_0 群の元をトレイス τ で測ったときの値域は $\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ となることが知られている．

REFERENCES

[A76] M. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Astérisque **32**(1976), 43–72.

[A00] ——— *K-Theory past and present*, preprint, math.KT/0012213

[AS63] M. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds,* Bull. A. M. S. **69**(1963), 422–433.

[AB64] M. Atiyah and R. Bott, *On the periodicity theorem for complex vector bundels,* Acta. Math. **112**(1964), 229–247.

[AS68] M. Atiyah and I. M. Singer, *The index of Elliptic operators* I, Ann. of Math. **87**(1968), 484–530; III, **87** (1968), 546–604; IV, **93** (1971), 119–138; V, **93** (1971), 139–149.

[ASe68] M. Atiyah and G. Segal, *The index of Elliptic operators* II, Ann. of Math. **87**(1968), 531–545.

[AS69] M. Atiyah and I. M. Singer, *Index theory for skew-adjoint Fredholm operators,* Publ. Math. IHES **37**(1969), 305–326.

[ABS73] M. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi, *On the heat equation and the index theorem*, Invent. Math. **19**(1973), 279–330.

[APS75] M. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry* I, Cambr. Phil. Soc. **77**(1975), 43–69; II, **78**(1975), 405–432; III, **79**(1976), 71–99.

[Bl86] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Mathematical Sciences Research Institute Publications **5**, Springer-Verlag New York-Berlin, 1986.

[C44] S. Chern, *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **45**(1944), 741–752.

[Co82] A. Connes, *A survey of foliations and operator algebras*, Proc. Symp. Pure Math. **38** (1982), 521–628.

[Co86-1] A. Connes, *Non-commutative differential geometry* I , II, Publ. Math. IHES, **62** (1986), 257–360.

[Co86-2] A. Connes, *Cyclic cohomology and the transversal fundamental class of a foliation*, in *Geometric Method in Operator Algebras* (H. Araki and E. G. Effros, eds.), Pitman Research Notes in Math. Series **123** (1986), Longman Scientific and Technical, 52–144.

[Co94] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic, 1994.

[CM82] A. Connes and H. Moscovici, *The L^2-index theorem for homogeneous spaces of Lie groups*, Ann. of Math. **115** (1982), 291–330.

[G73] P. Gilkey, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes*, Adv. in Math. 10 (1973), 344–381.

[H66] F. Hirzebruch, *Topological methods in Algebraic Geometry* , Third enlarged edition, Springer-Verlag, 1966.

[S77] I. M. Singer, *Some remarks on operator theory and index theory* , Lect. Notes in Math. 575 (1977), 128–138.

[T54] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiabl53]es* , Comment. Math. Helv. **28** (1954) 17–86.

[W85] E. Witten, *Global gravitational anomalies* , Comm. Math. Phys. **100** (1985) 197–229.